Extrait de LAUNAY Mickaël, *Le grand roman des maths, de la préhistoire à nos jours,* Flammarion, 2016 ; p.185-1998

Un langage pour les mathématiques

C'est en 1591 que Viète publie ce qui va devenir son œuvre principale: *In artem analyticem isagoge,* ou *l'Introduction à l'art analytique,* souvent nommé par le seul nom *d'Jsagoge.* Étrangement, ce n'est pas pour les théorèmes ou les démonstrations mathématiques qu'il y développe que l'*Isagoge* fera date, mais pour la façon dont ces résultats sont formulés. Viète va être le principal instigateur de l'algèbre nouvelle qui va faire surgir, en quelques décennies, un tout nouveau langage mathématique.

Pour comprendre sa démarche, il faut nous replonger dans les ouvrages mathématiques des temps antérieurs. Si les théorèmes géométriques d'Euclide ou les méthodes algébriques d'al-Khwarizmï sont encore très utiles de nos jours, la façon de les exprimer s'est radicalement transformée. Les savants anciens n'avaient pas de langage spécifique pour écrire les mathématiques. Tous les symboles qui nous sont si familiers tels que ceux utilisés pour les quatre opérations élémentaires, +, -, x et +, ne furent inventés qu'à la Renaissance. Pendant près de cinq millénaires, des Mésopotamiens aux Arabes en passant par les Grecs, les Chinois et les Indiens, les formules mathématiques squattèrent le vocabulaire courant des langues dans lesquelles elles étaient écrites.

Les livres d'al-Khwarizmï et des algébristes de Bagdad sont ainsi entièrement écrits en langue arabe et sans aucun symbolisme. Dans leurs ouvrages, certains raisonnements pouvaient alors s'étendre sur plusieurs pages alors même que quelques lignes suffisent de nos jours. Souvenez-vous de l'équation du second degré suivante présentée dans son *al-jabr:*

> *Le carré d'un nombre plus vingt et un est égal à dix fois ce nombre.*

Voici la façon dont al-Khwarizmi détaillait sa résolution :

> *Les Carrés et les Nombres sont égaux aux Racines; par exemple, « un carré et vingt et un en nombres sont égaux à dix racines du même carré». C'est-à-dire, quel doit être la quantité d'un carré qui, quand vingt et un dirhams lui sont ajoutés, devient égal à lëquivalent de dix racines de ce carré? Solution : Prenez la moitié du nombre de racines; la moitié est cinq. Multipliez-la par elle-même; le produit est vingt-cinq. Retranchez à ceci le vingt et un qui est associé au carré; le reste est quatre. Extrayez sa racine; c'est deux. Retranchez cela de la moitié des racines qui est cinq; il reste trois. Cela est la racine du carré que vous recherchez et le carré est neuf Vous pourriez aussi ajouter la racine à la moitié des racines; la somme est sept; cela est la racine du carré que vous cherchez et le carré lui-même vaut quarante-neuf*

Un tel texte reste aujourd'hui bien fastidieux à lire, même pour les étudiants qui maîtrisent parfaitement la méthode dont il est question. Sa résolution aboutit à deux solutions: 9 et 49.

L'algèbre rhétorique, comme on l'appellera plus tard, est non seulement très longue à écrire, mais elle souffre en plus de certaines ambiguïtés de la langue qui peuvent donner à une même phrase plusieurs interprétations. Avec la complexification des raisonnements et des démonstrations, ce mode d'écriture va progressivement se révéler épouvantable à manipuler.

À ces difficultés, s'ajoutent parfois celles que les mathématiciens s'imposent à eux-mêmes. On trouve ainsi régulièrement des mathématiques écrites en vers. Ce phénomène est souvent résiduel d'une tradition orale dans laquelle l'apprentissage par cœur est facilité par la forme poétique. Quand Tartaglia transmet sa méthode de résolution du troisième degré à Cardano, il la rédige en italien et en alexandrins! Évidemment, la démonstration perd en clarté ce qu'elle gagne en poésie et l'on peut légitimement soupçonner Tartaglia, dont on sait la réticence à divulguer sa preuve, d'en avoir volontairement brouillé la compréhension. En voici un extrait traduit en français.

Quand le cube et les choses
Se trouvent égalés au nombre
Trouves-en deux autres qui different de celui-ci.
Ensuite comme il est habituel
Que leur produit soit égal
Au cube du tiers de la chose.
Puis dans le résultat général
De leurs racines cubiques bien soustraites,
Tu obtiendras ta chose principale.

Plutôt obscur, non? Ce que Tartaglia appelle la chose, c'est précisément le nombre recherché, l'inconnue. La présence de cubes dans ce texte marque bien que nous avons affaire à une équation du troisième degré. Cardano lui-même, une fois en possession du poème, éprouvera les plus grandes difficultés à le déchiffrer.

Pour faire face à cette complexité croissante, les mathématiciens vont peu à peu commencer à simplifier le langage algébrique. Ce processus commence en Occident musulman dans les derniers siècles du Moyen Age, mais c'est surtout en Europe entre les XVe et XVIe siècles que le mouvement va prendre toute son ampleur.

Dans un premier temps, de nouveaux mots spécifiques aux mathématiques firent leur apparition. Ainsi, le mathématicien gallois Robert Recorde proposa au milieu du XVIe siècle une nomenclature de certaines puissances du nombre inconnu, basée sur un système de préfixes pouvant multiplier les puissances aussi loin que souhaité. Le carré de l'inconnue est par exemple appelé zenzike, sa puissance sixième zenzicubike et sa puissance huitième zenzizenzizenzike.

Et puis, peu à peu, commencent à fleurir un peu partout et en ordre dispersé des symboles tout nouveaux qui nous semblent pourtant si familiers aujourd'hui.

Vers 1460, !'Allemand Johannes Widmann est le premier à employer les signes + et - pour désigner l'addition et la soustraction. Au début du XVIe siècle, Tartaglia, que nous connaissons, est l'un des premiers à utiliser les parenthèses ( ) dans des calculs. En 1557, l'Anglais Robert Recorde utilise pour la première fois le signe = pour désigner l'égalité. En 1608, le Néerlandais Rudolph Snellius se sert d'une virgule pour séparer la partie entière et la partie décimale d'un nombre. En 1621, c'est !'Anglais Thomas Harriot qui introduit les signes < >

pour marquer l'infériorité ou la supériorité de deux nombres.

En 1631, !'Anglais William Oughtred utilise la croix x pour noter la multiplication et devient en 1647 le premier à utiliser la lettre grecque TT pour désigner le fameux rapport d'Archimède. L'Allemand Johann Rahn emploie quant à lui pour la première fois en 1659 l'obèle+ pour la division. En 1525, !'Allemand Christoff Rudolff désigne la racine carrée par le signe *-'1* auquel le Français René Descartes rajoute une barre horizontale en 1647: -V-.

Bien entendu, tout cela ne se fait pas de manière linéaire et ordonnée. Au cours de cette période, une multitude d'autres symboles naissent et meurent. Certains ne sont utilisés qu'une seule fois. D'autres se développent et se font concurrence. Entre la première utilisation d'un signe et son adoption définitive par l'ensemble de la communauté mathématique, s'écoulent souvent plusieurs dizaines d'années. Ainsi, un siècle après leur introduction, les signes + et - n'étaient toujours pas complètement adoptés et beaucoup de mathématiciens utilisaient encore les lettres P et M, initiales des mots latins *plus* et *minus*, pour désigner l'addition et la soustraction.

Et Viète dans tout ça? Le savant français va être l'un des catalyseurs de ce vaste mouvement. Dans l'*Isagoge*, il lance un vaste programme de modernisation de l'algèbre et en pose la clef de voûte en introduisant le calcul littéral, c'est-à-dire le calcul avec des lettres de l'alphabet. Sa proposition est aussi simple que déroutante : nommer les inconnues des équations par des voyelles et les nombres connus par des consonnes.

Cette répartition des voyelles et consonnes sera pourtant rapidement abandonnée au profit d'une suggestion légèrement différente de René Descartes : les premières lettres de l'alphabet *(a, b, c. . .*) désigneront les quantités connues et les dernières *(x, y* et *z)* seront les inconnues. C'est cette convention qu'utilisent encore aujourd'hui la plupart des mathématiciens et la lettre « *x* » est devenue jusque dans le langage courant symbole d'inconnu et de mystère.

Pour bien comprendre comment l'algèbre est transformée par ce nouveau langage, rappelez-vous de l'équation suivante:

On cherche un nombre qui multiplié par 5 donne 30.

Grâce au nouveau symbolisme, cette équation s'écrit désormais en une poignée de signes : $5 \times x = 30$.

Avouez que c'est nettement plus court! Souvenez-vous également que cette équation n'était qu'un cas particulier d'une classe bien plus large:

On cherche un nombre qui multiplié par une certaine quantité 1 donne une quantité 2.

Cette équation se note désormais $a \times x = b$.

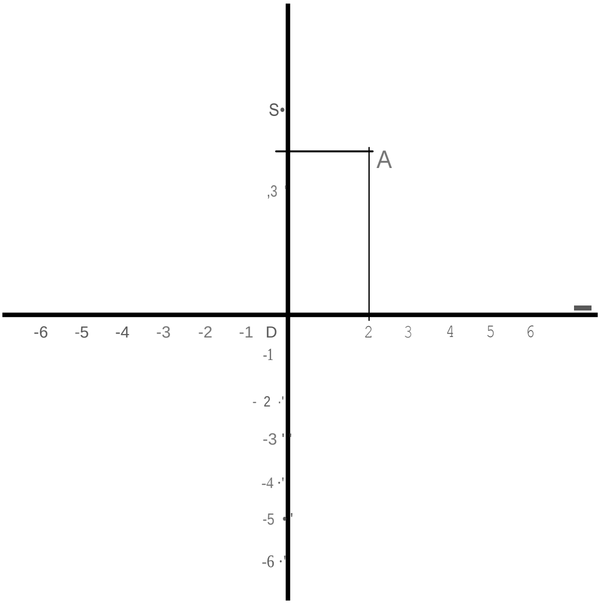
Les nombres *a* et *b* étant pris au début de l'alphabet, nous savons qu'il s'agit de quantités connues à partir desquelles nous cherchons à calculer *x*. Et comme nous l'avions vu, les équations de ce type se résolvent en divisant la deuxième quantité connue par la première, en d'autres termes : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \div a$.

Dès lors, les mathématiciens se mettent à dresser des listes de cas et à établir les règles de manipulation des équations littérales. L'algèbre se transforme peu à peu en une forme de jeu dont les coups autorisés sont déterminés par ces règles de calcul. Tenez, reprenons la résolution de notre équation. En passant de $a \times x = b$ a $x = b + a$, la lettre a est passée de gauche à droite du signe = et son opération s'est transformée de multiplication en division. Cela est donc une règle autorisée : toute quantité multipliée peut passer de l'autre côté de l'égalité en devenant divisée. Des règles similaires permettent de traiter les additions et les soustractions ou de transformer les puissances. Le but du jeu reste le même : mettre à jour la valeur de l'inconnue x.

Ce jeu de symboles est tellement efficace que l'algèbre va rapidement prendre son indépendance par rapport à la géométrie. Plus besoin d'interpréter les multiplications comme des rectangles, ni de faire des démonstrations sous forme de puzzles. Les x, les y et les z prennent la relève ! Mieux que ça. La fulgurante efficacité du calcul littéral va renverser le rapport de force et c'est bientôt la géométrie qui va se retrouver dépendante des démonstrations algébriques.

Ce retournement, c'est le Français René Descartes qui va le déclencher en introduisant un moyen simple et puissant d'algébriser les problèmes de la géométrie par un système d'axes et de coordonnées.

> COORDONNÉES CARTÉSIENNES
>
> L'idée de Descartes est aussi élémentaire que géniale : placer dans le plan deux droites graduées, l'une horizontale et l'autre verticale, afin de repérer chaque point géométrique par ses coordonnées selon ces deux axes. Regardons par exemple le point A suivant :

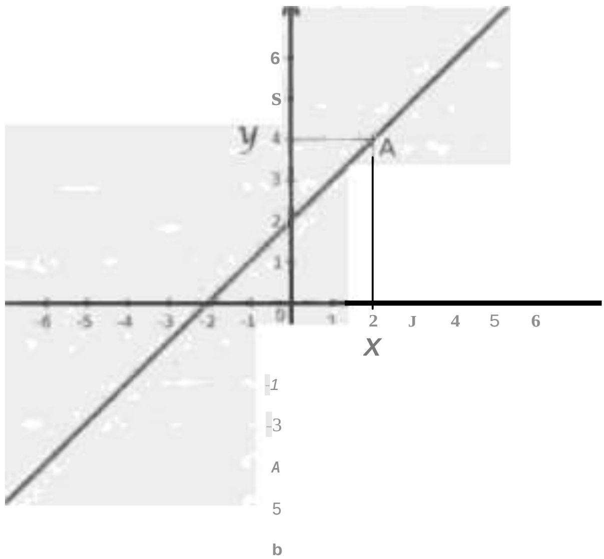


Le point A se trouve juste au-dessus de la graduation 2 de l'axe horizontal et au niveau de la graduation 4 de l'axe vertical. Ses coordonnées sont donc 2 et 4. Par ce procédé, il devient possible de représenter chaque point géométrique par deux nombres et inversement d'associer un point à chaque paire de nombres.

Depuis leurs débuts, la géométrie et les nombres ont toujours entretenu d'étroits rapports, mais avec les coordonnées de Descartes, les deux disciplines vont se fondre l'une dans l'autre. Chaque problème de géométrie peut désormais s'interpréter algébriquement et chaque problème d'algèbre se représenter géométriquement.

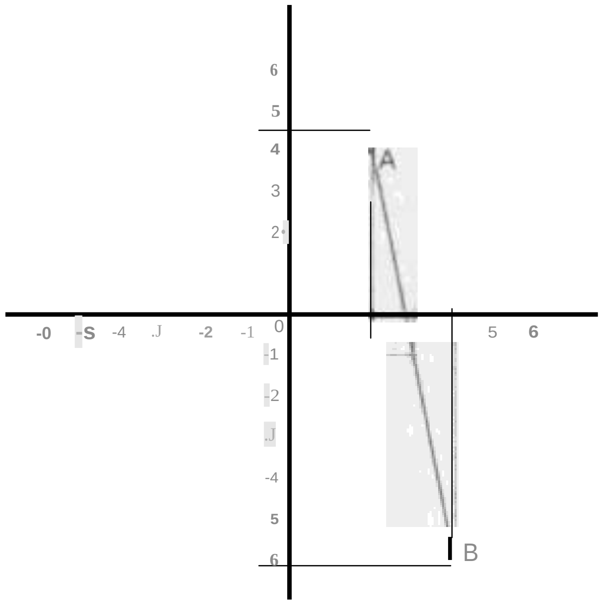
Regardons par exemple l'équation du premier degré suivante : $x + 2 = y$. C'est une équation à deux inconnues : nous cherchons x et y. Il est par exemple possible de voir que $x = 2$ et $y = 4$ forment une solution puisque $2 + 2 = 4$. On peut alors remarquer que les nombres 2 et 4 sont précisément les coordonnées du point A. Cette solution peut donc se représenter géométriquement par ce point.

À vrai dire, l'équation $x + 2 = y$ possède une infinité de solutions. Il y a par exemple $x = 0$ et $y = 2$ ou encore x = l et y= 3. Pour chaque valeur possible de x, il est possible de trouver le y correspondant en lui ajoutant 2. Nous pouvons dès lors placer sur notre plan tous les points correspondant à ces solutions. Voilà ce que l'on obtient.



Une ligne droite! Les solutions s'alignent toutes parfaitement pour former une ligne droite. Il n'y en a pas une qui dépasse. Dans le monde de Descartes, cette droite est donc la représentation géométrique de l'équation, tout comme l'équation est la représentation algébrique de la droite. Les deux objets se confondent et il n'est pas rare de nos jours d'entendre des mathématiciens parler de la droite « $x + 2 = y$». Donnons le même nom à des choses différentes, l'algèbre et la géométrie sont bel et bien en train de ne devenir qu'une seule et même discipline.

Cette correspondance donne lieu à tout un dictionnaire permettant de traduire les objets du langage géométrique au langage algébrique et *vice versa*. Par exemple, ce que l'on appelle « milieu » en géométrie se nomme « moyenne» en algèbre. Reprenons notre point A de coordonnées 2 et 4 et adjoignons-lui un point B de coordonnées 4 et - 6. Pour trouver le milieu du segment reliant A à B, il suffit alors de faire la moyenne des coordonnées. La première coordonnée de A est 2 et celle de B est 4, on peut donc en déduire que la première coordonnée du milieu est égale à la moyenne de ces deux nombres : $(2+4)/2 = 3$. En faisant la même chose sur l'axe vertical, on trouve $(4+(-6))/2 = -1$. Les coordonnées du point milieu sont donc 3 et - 1. On peut vérifier que cela marche bien en traçant la figure :



Dans ce dictionnaire algèbre-géométrie, un cercle devient une équation du second degré, le point d'intersection de deux courbes est donné par un système d'équations, tandis que le théorème de Pythagore, les constructions trigonométriques ou les découpages en puzzles se métamorphosent en diverses formules littérales.
Bref, plus besoin de tracer les figures pour faire de la géométrie, les calculs algébriques ont pris leur place et sont tellement plus rapides et pratiques!

Dans les siècles qui suivirent, les coordonnées de Descartes enregistrèrent de nombreux succès. L'une de leurs plus belles réussites fut sans doute la résolution d'une conjecture qui résistait aux mathématiciens depuis l'Antiquité: la quadrature du cercle.

Peut-on tracer à la règle et au compas un carré de même surface qu'un cercle donné? Souvenez-vous, il y a plus de trois mille ans, le scribe Ahmès se cassait déjà les dents sur cette question. Après lui, les Chinois et les Grecs s'y étaient essayés sans plus de succès et le problème était devenu au fil des siècles l'une des plus grandes conjectures des mathématiques.

Grâce aux coordonnées cartésiennes, les lignes droites construites à la règle se transforment en équations du premier degré, tandis que les cercles du compas deviennent des équations du second degré. D'un point de vue algébrique, la quadrature du cercle se pose donc de la façon suivante: peut-on trouver une succession d' équations du premier ou du second degré dont le nombre π serait solution ? Cette nouvelle formulation relança les recherches, mais même ainsi posée, la question restait compliquée.

C'est finalement le mathématicien allemand Ferdinand von Lindemann qui mit fin au suspense en 1882. Non, le nombre π n'est pas solution d'équations de degré 1 ou 2 et la quadrature du cercle est donc impossible. Ainsi tomba le problème qui garde à ce jour le titre de conjecture ayant résisté le plus longtemps aux assauts des mathématiciens.

Les coordonnées cartésiennes peuvent facilement se généraliser à la géométrie dans l'espace. En trois dimensions, chaque point est alors repéré par trois coordonnées et les procédés algébriques peuvent s'y appliquer de la même manière.

Les choses deviennent plus subtiles dès que l'on passe à la quatrième dimension. En géométrie, impossible de représenter une figure en 4D puisque notre monde physique tout entier n'est lui-même qu'en 3D. En algèbre, en revanche, aucun souci: un point de la quatrième dimension est simplement une liste de quatre nombres. Et toutes les méthodes algébriques s'y appliquent naturellement. Si l'on considère par exemple les points A et B dont les coordonnées sont 1, 2, 3 et 4 d'une part et 5, 6, 7 et 8 d'autre part, on peut tranquillement utiliser la moyenne de ces nombres pour affirmer que leur milieu est le point de coordonnées 3, 4, 5 et 6. La géométrie en dimension quatre sera notamment exploitée au :xxe siècle par la théorie de la relativité d'Albert Einstein, qui utilisera la quatrième coordonnée pour modéliser le temps.

Et l'on peut continuer longtemps comme ça. Une liste de cinq nombres est un point en dimension 5. Rajoutez un sixième nombre et nous voilà en dimension 6. Il n'y a aucune limite à ce processus. Une liste de mille nombres est un point d'un espace de dimension 1000.

À ce niveau, l'analogie peut sembler un simple jeu de langage, propre à faire sourire, mais sans réelle utilité. Détrompez-vous. Cette correspondance trouve de multiples applications, notamment en statistiques, dont l'objet est précisément d'étudier de longues listes de données numériques.

Si l'on étudie par exemple des données démographiques d'une population, on peut vouloir quantifier à quel point certaines caractéristiques telles que la taille, le poids, ou les habitudes alimentaires d'un groupe d'individus fluctuent autour de la moyenne. En interprétant cette question géométriquement, il s'agit de calculer la distance entre deux points, le premier représentant la liste des données concernant chaque individu, le deuxième représentant la liste moyenne. Il y a donc autant de coordonnées que le nombre d'individus dans le groupe. Le calcul se fait alors à l'aide de triangles rectangles dans lesquels on peut appliquer le théorème de Pythagore. Un statisticien calculant l'écart-type d'un groupe de mille individus utilise donc, souvent sans le savoir, le théorème de Pythagore dans un espace de dimension 1000 ! Cette méthode s'applique également en biologie de l'évolution, pour calculer la différence génétique entre deux populations animales. En mesurant par des formules issues de la géométrie la distance entre leurs génomes codés sous la forme de listes de nombres, il devient possible d'établir la proximité relative de différentes espèces et d'en déduire peu à peu l'arbre généalogique du vivant.

Nous pouvons même pousser l'exploration jusqu'à des listes infinies de nombres, c'est-à-dire à des points dans un espace de dimension infinie ! À vrai dire, nous en connaissons déjà: ce sont les suites numériques telles que celle de Fibonacci. En étudiant ses lapins, le mathématicien italien faisait sans s'en douter de la géométrie en dimension infinie ! C'est cette interprétation géométrique qui permettra notamment aux mathématiciens du XVIIIe siècle d'établir le plus clairement possible le lien subtil qui lie la suite de Fibonacci au nombre d'or.